# ΟΜΑΔΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Με $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ συμβολίζουμε το σύνολο των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ ($\simeq \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$)

1) Το σύνολο των $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ είναι ομάδα

για λόγους ευκολίας

Αποδ.

Πράξη κλειστή, $(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)$, $\forall A,B,\Gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A+\mathbb{O} = \mathbb{O}+A = A$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A-A = -A+A = \mathbb{O}$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

2) <u>(Γενική) Γραμμική ομάδα $GL_n(\mathbb{R})$</u>

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ αντιστρέψιμος} \Leftrightarrow \det A \neq 0\}$$

Το σύνολο $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ είναι ομάδα

Αποδ.

Πράξη κλειστή $\rightsquigarrow$ Έστω $A, B \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A \neq 0$ & $\det B \neq 0$

$\det(AB) = \underset{\neq 0}{\det A}\,\underset{\neq 0}{\det B} \neq 0 \Rightarrow AB \in GL_n(\mathbb{R})$

$(A\cdot B)\Gamma = A(B\cdot\Gamma)$, $\forall A,B,\Gamma \in GL_n(\mathbb{R})$

$I\cdot A = A\cdot I = A$, $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $I \in GL_n(\mathbb{R})$ (αφού $\det I = 1 \neq 0$)

$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$, $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\exists A^{-1})$.

(όπου $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det I = 1 \neq 0 \Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$)

## 3) ΟΜΑΔΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

$A$ ορθογώνιος $\Leftrightarrow AA^t = I \Leftrightarrow A^t = A^{-1}$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ:

$\det A^t = \det A$

Επίσης, αν $A$ ορθογώνιος $\Rightarrow AA^t = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(AA^t) = \det I \Rightarrow \det A \cdot \det A^t = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A \det A = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$

Συμβολισμός

$O_n = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = \pm 1 \}$ και $(O_n, \cdot)$ ομάδα

Απόδ

$A, B \in O_n \Rightarrow AB \in O_n$

$\det(AB) = \underbrace{\det A}_{=\pm 1} \cdot \underbrace{\det B}_{=\pm 1} = (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \Rightarrow AB \in O_3$

- $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$, $\forall A, B, \Gamma \in O_n$
- $(\exists I_n \in O_n)$ $AI_n = I_n A = A$, $\forall A \in O_n$
- $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ και συγκεκριμένα $\exists A^{-1} \in O_n$: $A^{-1} \cdot A = I_n$ ( $A^{-1} \in O_n$ διότι $\det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \det A^{-1} = \pm 1$ )

$O_n \leq GL_n(\mathbb{R})$

(άρα $O_n \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, $O_n$ ομάδα)

ουσιαστικά δ.ο το σύνολο των στοιχείων αποτελεί ομάδα

Τέλος μέσα στο $O_n(\mathbb{R})$ "ζει" το σύνολο των πινάκων με ορίζουσα 1

Συμβολίζεται

$SL_n(\mathbb{R}) = SO_n = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1 \}$

↓

(special lineral group)

ειδική ορθογώνια ομάδα

Παρατήρηση:

$SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$

Απόδ

Θα το αποδείξουμε λίγο πιο διαφορετικά

έστω απεικόνιση $\varphi : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ με $A \longmapsto \det A$

φ ομομορφισμός διότι

Έστω $A, B \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(AB) = \det(AB) = \det A \det B =$
$= \varphi(A)\varphi(B)$.

$\ker\varphi = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \varphi(A) = e\} = SL_n(\mathbb{R})$

(*) $\varphi(A) = e \Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow$

Τότε από θεώρημα "Θεωρίας ομάδων"

το $\ker\varphi \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$

ΠΑΡΑΘΕΜΑ:

Από κεφάλαιο γεωμετρικών μετασχηματισμών:

* Εάν $A \in O_n \Rightarrow$ ο αντίστοιχος γραμ. γεωμ. μετασχ. είναι ισομετρία

* Κάθε $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισομετρία, αναπαρ οιάται από πίνακα $A \in O_n$

* Αν $A \in O_2 \Rightarrow A$ αναπαριστά είτε στροφή περί αρχή των αξόνων ($\det A = 1$) ή ανάκλαση ως προς ευθεία όπου διέρχεται από την αρχή των αξόνων ($\det A = -1$)

* Αν $A \in SO_3(\mathbb{R})$ παριστάνει στροφή του $\mathbb{R}^3$ περί άξονα από την αρχή των αξόνων

* Αν $A \in O_3 \setminus SO_3$ παριστάνει ανάκλαση

* Θεώρημα: Μια $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισομετρία (ταξινομ. ισομετρ.)
$\Leftrightarrow \exists A \in O_n(\mathbb{R})$, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax + \vec{\alpha}$

* Θεώρημα: Το σύνολο των ισομετριών $Isom(\mathbb{R}^n)$ αποτελεί ομάδα. Θα το αποδείξουμε.
Προφανώς $Isom(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset \Leftarrow \varphi(x) = x = I_n \cdot x + \vec{0}$
Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \in Isom(\mathbb{R}^n) \to \varphi_1 = A_1 x + \vec{\alpha_1}$ και $\varphi_2 = A_2 x + \vec{\alpha_2}$
Οδο $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in Isom(\mathbb{R}^3)$
$\varphi_1(\varphi_2(x)) = \varphi_1(A_2 x + \vec{\alpha_2}) = A_1(A_2 x + \vec{\alpha_2}) + \vec{\alpha_1} =$
$= \underbrace{A_1 A_2}_{\in O_n} x + (A_1 \vec{\alpha_2} + \vec{\alpha_1}) \in O_n$

- Προσεταιριστικότητα (άμεσο)
- Ουδέτερο: $\exists \varphi_e(x) = x = I_n x + \vec{0} \in Isom(\mathbb{R}^n)$
- τέτοια ώστε αν $\varphi(x) = Ax + \vec{\alpha} \in Isom(\mathbb{R}^n)$ (άρα $A$ ορθογ.)
$$\begin{cases} \varphi \circ \varphi_e = \varphi(x) \\ \varphi_e \circ \varphi = \varphi(x) \end{cases}$$
- Αντίστροφος: οδο $(\forall \varphi \in Isom(\mathbb{R}^n))(\exists \varphi^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n))$:
$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi_e = (\varphi^{-1} \circ \varphi)$
Έστω $\varphi(x) = Ax + \vec{\alpha} \in Isom(\mathbb{R}^n)$ $(A \in O_n, \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n)$
Έστω $\varphi^{-1}(x) = A^{-1} x + (-A^{-1} \vec{\alpha})$
Έτσι, $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi(A^{-1} x - A^{-1} \vec{\alpha}) = A(A^{-1} x - A^{-1} \vec{\alpha}) + \vec{\alpha} =$
$= \underbrace{AA^{-1}}_{I} x - \cancel{AA^{-1} \vec{\alpha}} + \cancel{\vec{\alpha}} = x = \varphi_e$
(Να πούμε ότι $\varphi^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n)$, όταν $A \in O_n$ και $O_n$ ομάδα)
Η $(Isom(\mathbb{R}^n), \circ)$ όχι αβελιανή
καθώς $O_n \subseteq Isom(\mathbb{R}^n) \to \varphi_1 \circ \varphi_2 \neq \varphi_2 \circ \varphi_1$
$\downarrow$
μη αβελ.